Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores

Een regenton

1 maximumscore 5

- $V = \pi\int_0^h (r(x))^2 \mathrm{d}x$ — 1
- $(r(x))^2 = \frac{1}{100}\left(5+15x-15x^2\right)$ — 1
- Een primitieve van $5+15x-15x^2$ is $5x+7\frac{1}{2}x^2-5x^3$ — 1
- Dus $V = \frac{\pi}{100}\left(5h+7\frac{1}{2}h^2-5h^3\right)$ — 1
- $V = \frac{\pi}{100}\cdot 2\frac{1}{2}\left(2h+3h^2-2h^3\right) = \frac{\pi}{40}\left(2h+3h^2-2h^3\right)$ — 1

2 maximumscore 5

- Het volume van de regenton is $\frac{3\pi}{40}$ ($\approx 0,236$) (m^3) (of nauwkeuriger) — 1
- $\frac{3}{4}\cdot\frac{3\pi}{40} = \frac{9\pi}{160}$ ($\approx 0,177$) (of nauwkeuriger) — 1
- Voor de waterhoogte h geldt: $\frac{\pi}{40}\left(2h+3h^2-2h^3\right) = \frac{9\pi}{160}$
  (of $\frac{\pi}{40}\left(2h+3h^2-2h^3\right) \approx 0,177$) — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost — 1
- Het antwoord: 0,72 (m) (of 72 cm) — 1

of

- Voor $h=1$ is $2h+3h^2-2h^3$ gelijk aan 3 — 1
- Voor de waterhoogte h moet gelden: $2h+3h^2-2h^3 = \frac{3}{4}\cdot 3$ — 2
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost — 1
- Het antwoord: 0,72 (m) (of 72 cm) — 1

Vraag	Antwoord	Scores

Een ellipsvormige baan

3 maximumscore 3

- De afstand van P tot de oorsprong op tijdstip t is $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sin t\right)^2 + \left(\sin\left(t+\frac{1}{3}\pi\right)\right)^2}$ 1
- Beschrijven hoe het maximum van deze afstand kan worden bepaald 1
- Het antwoord: 1,04 1

4 maximumscore 5

- De snelheid van P op tijdstip t is $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ 1
- $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\cos t$ 1
- $\frac{dy}{dt} = \cos\left(t+\frac{1}{3}\pi\right)$ 1
- Voor $t=0$ geldt: $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$ en $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}$ 1
- De snelheid is dan $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ (of een vergelijkbare uitdrukking) 1

5 maximumscore 6

- In A en B geldt: $\sin\left(t+\frac{1}{3}\pi\right) = \sin t$ 1
- Dus $t+\frac{1}{3}\pi = t + k\cdot 2\pi$ of $t+\frac{1}{3}\pi = \pi - t + k\cdot 2\pi$ (met k geheel) 1
- Hieruit volgt voor $0 \le t \le 2\pi$: $t = \frac{1}{3}\pi$ of $t = 1\frac{1}{3}\pi$ 2
- Dus de coördinaten van A zijn $\left(\frac{1}{4}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ en de coördinaten van B zijn $\left(-\frac{1}{4}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ 2

Raaklijn door perforatie

6 maximumscore 7

- $\frac{x^2-4}{x^3+2x^2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x^2(x+2)}=\frac{x-2}{x^2}$ (met $x\neq -2$ en $x\neq 0$) 1
- Voor x in dit laatste -2 invullen geeft als uitkomst -1, dus de perforatie is $(-2,-1)$ 1
- Het snijpunt met de x-as is $(2,0)$ 1
- $f'(x)=\frac{1\cdot x^2-(x-2)\cdot 2x}{x^4}$ $\left(=\frac{4-x}{x^3}\right)$
  (of $f'(x)=\frac{2x\cdot(x^3+2x^2)-(x^2-4)\cdot(3x^2+4x)}{(x^3+2x^2)^2}$) 2
- $f'(2)=\frac{1}{4}$, dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in $(2,0)$ is $\frac{1}{4}$ 1
- Een vergelijking van de raaklijn in $(2,0)$ is dus $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$ en hieraan voldoen de coördinaten van het punt $(-2,-1)$ (of: De lijn door $(-2,-1)$ en $(2,0)$ heeft ook richtingscoëfficiënt $\frac{1}{4}$) (dus de raaklijn in $(2,0)$ gaat door de perforatie) 1

Vraag	Antwoord	Scores

Medicijn in actieve vorm

7 maximumscore 3

- Er moet gelden $e^{-k \cdot t_{99}} = 0,01$ — 2
- Dus $t_{99} = \dfrac{\ln 100}{k}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) (of $t_{99} = \dfrac{4,6}{k}$ (of nauwkeuriger)) — 1

Opmerking
Als met $e^{-k \cdot t_{99}} = 0,99$ *is gerekend, dan voor deze vraag maximaal 1 scorepunt toekennen.*

8 maximumscore 4

- $a'(t) = 25\left(-0,1 \cdot e^{-0,1 \cdot t} + 0,4 \cdot e^{-0,4 \cdot t}\right)$ — 2
- Beschrijven hoe de vergelijking $25\left(-0,1 \cdot e^{-0,1 \cdot t} + 0,4 \cdot e^{-0,4 \cdot t}\right) = 0$ kan worden opgelost — 1
- $t_{max} \approx 4,6$ (of nauwkeuriger) (of $t_{max} = \frac{10}{3} \ln 4$ (of een gelijkwaardige uitdrukking)) — 1

9 maximumscore 6

- Beschrijven hoe met de GR het maximum van $a(t)$ berekend kan worden — 1
- Dit maximum is (ongeveer) 11,8 — 1
- Beschrijven hoe met de GR de t-waarden die behoren bij de snijpunten met de horizontale lijn op hoogte 5,9 gevonden kunnen worden — 1
- De t-waarden zijn (ongeveer) 1,0 en 14,3 (of nauwkeuriger) — 2
- Het antwoord: 13 (uur) — 1

of

- Substitutie van $t_{max} = 4,6$ (of nauwkeuriger) (of $t_{max} = \frac{10}{3} \ln 4$) in de formule voor $a(t)$ geeft $a_{max} \approx 11,8$ (of nauwkeuriger) — 1
- Opgelost moet worden $25\left(e^{-0,1 \cdot t} - e^{-0,4 \cdot t}\right) = \frac{1}{2} \cdot 11,8$ — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost — 1
- $t \approx 1,0$ of $t \approx 14,3$ (of nauwkeuriger) — 2
- Het antwoord: 13 (uur) — 1

Vraag	Antwoord	Scores

Drie halve cirkels

10 maximumscore 5

- $MC = 2$ en $MD = 4$ — 1
- De stelling van Pythagoras in driehoek MCD geeft $CD = (\sqrt{MD^2 - MC^2} =)\sqrt{4^2 - 2^2}$ $(= \sqrt{12})$ — 1
- Gebruik van een rechthoekige driehoek KLS, waarbij S de loodrechte projectie is van K op LQ (of een rechthoekige driehoek PQX, waarbij X het snijpunt is van LQ en de lijn door P evenwijdig aan KL) — 1
- $LS = 2$, $KS = PQ$, $KL = 4$ (of: $QX = 2$, $PX = KL = 4$) — 1
- De stelling van Pythagoras in driehoek KLS (of in driehoek PQX) geeft $KS = (\sqrt{KL^2 - LS^2} =)\sqrt{4^2 - 2^2}$, dus $PQ = \sqrt{4^2 - 2^2}$ $(= \sqrt{12})$ (of: $PQ = (\sqrt{PX^2 - QX^2} =)\sqrt{4^2 - 2^2}$ $(= \sqrt{12})$) (dus geldt $PQ = CD$) — 1

of

- $MC = 2$ en $MD = 4$ — 1
- De stelling van Pythagoras in driehoek MCD geeft $CD = (\sqrt{MD^2 - MC^2} =)\sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ — 1
- (ΔRKP en ΔRLQ hebben twee paren gelijke hoeken, dus) $\Delta RKP \sim \Delta RLQ$ met R het snijpunt van AL en PQ; samen met $KP = 1$ en $LQ = 3$ geeft dit: ΔRLQ is een vergroting van ΔRKP met factor 3 — 1
- $KL = 4$, dus $RK = 2$ — 1
- De stelling van Pythagoras in driehoek RKP geeft $RP = (\sqrt{RK^2 - PK^2} =)\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ dus $PQ = 2\sqrt{3}$ (dus geldt $PQ = CD$) — 1

11 maximumscore 5

- $KM = 3$, $MT = 4 - r$, $KT = 1 + r$ — 1
- De cosinusregel in driehoek KMT geeft $(1 + r)^2 = 3^2 + (4 - r)^2 - 2 \cdot 3 \cdot (4 - r) \cdot \cos\alpha$ — 1
- Herleiden tot $\cos\alpha = \dfrac{12 - 5r}{12 - 3r}$ — 3

Vraag	Antwoord	Scores

12 **maximumscore 4**

- $\dfrac{7r-4}{4-r}=\dfrac{12-5r}{12-3r}$ 1
- Hieruit volgt $(7r-4)(12-3r)=(12-5r)(4-r)$ 1
- Herleiden tot $26r^2-128r+96=0$ 1
- Dit geeft, bijvoorbeeld met de abc-formule, $r=\frac{12}{13}$ (want $r=4$ voldoet niet) 1

of

- $\dfrac{7r-4}{4-r}=\dfrac{12-5r}{12-3r}$ 1
- Hieruit volgt $\dfrac{21r-12}{12-3r}=\dfrac{12-5r}{12-3r}$ 1
- Dus $21r-12=12-5r$ 1
- Dit geeft $r=\frac{12}{13}$ 1

Onafhankelijk van *p*

13 **maximumscore 8**

- $f(x)=0$ geeft ($x=0$ of) $x=3p$ (dus de x-coördinaat van A is $3p$) 1
- De oppervlakte van het grijze gebied is $\left[-\frac{1}{4}x^4+px^3\right]_0^{3p}$ 1
- Dit is $-\frac{1}{4}(3p)^4+p(3p)^3=-\frac{81}{4}p^4+27p^4=\frac{27}{4}p^4$ 1
- $f'(x)=-3x^2+6px$ 1
- $f'(x)=0$ geeft ($x=0$ of) $x=2p$ (dus de x-coördinaat van T is $2p$) 1
- $f(2p)=-(2p)^3+3p\cdot(2p)^2=4p^3$ (dus de y-coördinaat van T is $4p^3$) 1
- De oppervlakte van $OABC$ is dus $3p\cdot 4p^3=12p^4$ 1
- Dus de verhouding van de oppervlakten is $\frac{27}{4}p^4:12p^4=\frac{27}{4}:12$ $(=9:16)$ (en dit is onafhankelijk van p) 1

Opmerking
Als slechts voor een aantal waarden van p de verhouding is uitgerekend en dan geconcludeerd is dat de verhouding telkens gelijk is, hiervoor geen scorepunten toekennen.

Twee lijnen en een cirkel

14 maximumscore 3

- Voor de hoek α tussen m en n geldt:
  $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}$ $\left(=\dfrac{7}{\sqrt{50}}\right)$ — 2
- De gevraagde waarde van α is $8°$ — 1

of

- De richtingscoëfficiënt van m is -2, dus m maakt een hoek van ongeveer $63{,}4°$ (of $-63{,}4°$) met de x-as — 1
- De richtingscoëfficiënt van n is -3, dus n maakt een hoek van ongeveer $71{,}6°$ (of $-71{,}6°$) met de x-as — 1
- De hoek tussen m en n is het verschil tussen deze twee hoeken, dus de gevraagde waarde is $8°$ — 1

15 maximumscore 4

- $x = t$ en $y = 2-2t$ invullen in de vergelijking van c geeft
  $t^2+(1-2t)^2=1$ — 1
- Herleiden tot $5t^2-4t=0$ — 1
- Hieruit volgt ($t=0$ of) $t=\frac{4}{5}$ — 1
- $t=\frac{4}{5}$ invullen geeft $B(\frac{4}{5},\frac{2}{5})$ — 1

of

- $\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{2}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ voor $t=\frac{4}{5}$, dus $B(\frac{4}{5},\frac{2}{5})$ ligt op m — 2
- $\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}-1\right)^2=1$, dus $B(\frac{4}{5},\frac{2}{5})$ ligt op c — 2

16 **maximumscore 6**

- De middelloodlijn van AB gaat door $(\frac{9}{10}, \frac{1}{5})$ en heeft richtingscoëfficiënt $\frac{1}{2}$ — 1
- Een vergelijking van de middelloodlijn van AB is dus $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ — 1
- Een vergelijking van de middelloodlijn van AD is $x = \frac{5}{6}$ — 1
- Het snijpunt van deze middelloodlijnen is $M(\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$ — 1
- Dus A, B en D liggen op een cirkel met middelpunt $M(\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$ en straal $MA = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{18}}$ — 1
- $MC = \sqrt{\left(\frac{3}{5} - \frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{900} + \frac{1}{900}} = \sqrt{\frac{1}{18}}$, dus C ligt ook op deze cirkel (en dus liggen A, B, C en D op één cirkel) — 1